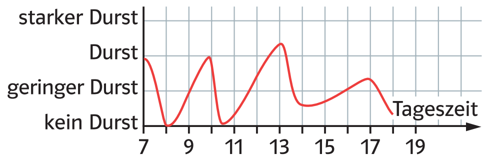
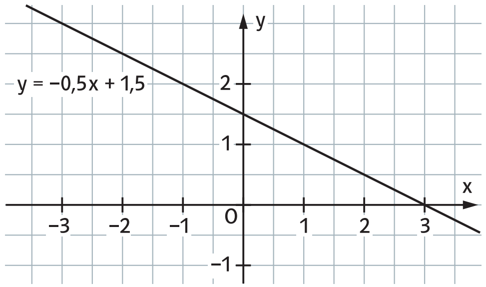
Funktion

Eine **Funktion** ist eine Zuordnung, bei der zu jeder Größe eines ersten Bereichs (Eingabegröße) **genau eine** Größe eines zweiten Bereichs (Ausgabegröße) gehört.



Funktionsvorschrift $x \to -0{,}5x + 1{,}5$

Graph



Das Schaubild einer **Funktion** lässt sich über eine **Wertetabelle**, die aus **Wertepaaren** besteht, oder einer Gleichung beschreiben.

Wertetabelle

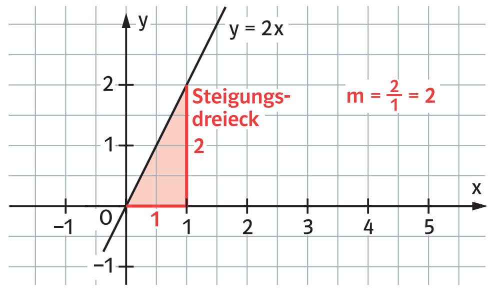
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0

Gleichung $y = -0{,}5x + 1{,}5$

→ Geraden

Proportionale Funktion

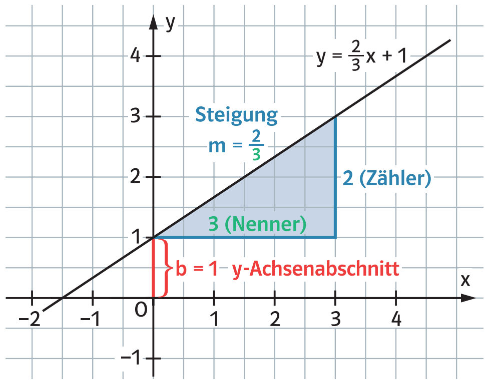
Eine **proportionale Funktion** hat als Schaubild eine **Gerade durch den Ursprung** des Koordinatensystems. Die Gerade hat die Gleichung **y = m · x**. Der Faktor m gibt die Steigung der Geraden an.



→ Geraden

Lineare Funktion

Das Schaubild einer linearen Funktion ist eine Gerade. Die Gerade wird eindeutig durch die **Steigung m** und den **y-Achsenabschnitt b** bestimmt.
Die Hauptform der Geradengleichung ist
y = m · x + b.



→ Geraden

Ein Punkt und die Steigung sind genug.

Eine Gerade ist eindeutig festgelegt, wenn die Steigung der Geraden sowie ein Punkt, der auf der Geraden liegt, angegeben sind.
Beispiel: Eine Gerade ist festgelegt durch den Punkt A(2|1) und die Steigung $m = \frac{3}{4}$.

rechnerische Lösung:
Wir setzen die Koordinaten des Punkts A sowie den Wert für m in die Hauptform der Geradengleichung ein und berechnen b.

$y = m \cdot x + b$
$1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b$
$1 = 1{,}5 + b \quad |-1{,}5$
$-0{,}5 = b$

Dann setzen wir nur die Werte für m und für b in die Hauptform ein und erhalten die gesuchte Geradengleichung.
$y = \frac{3}{4} \cdot x - 0{,}5$

zeichnerische Lösung:
Wir zeichnen den Punkt A und von dort aus das Steigungsdreieck. Die gezeichnete Gerade liefert den y-Achsenabschnitt und die Geradengleichung kann angegeben werden.

→ Geraden

Zwei Punkte sind genug

Zwei vorgebene Punkte einer Geraden genügen, um die Steigung und damit auch die zugehörige Gleichung zu bestimmen.

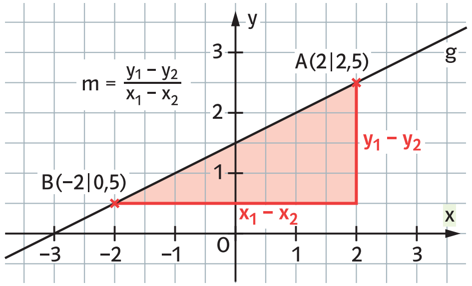
Die Gerade g geht durch die Punkte A(2 | 2,5) und B(−2 | 0,5).

Für die Steigung m gilt damit:

$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ $\quad$ $m = \frac{2{,}5 - 0{,}5}{2 - (-2)}$

$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Jetzt setzt man den Wert für m sowie die Koordinaten eines Punkts in die Hauptform ein, berechnt b und erhält die gesuchte Gleichung y = 0,5 · x + 1,5.



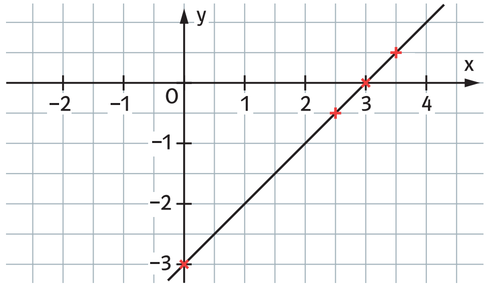
→ Geraden

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Eine Gleichung der Form a x + b y = c heißt **lineare Gleichung** mit den zwei Variablen x und y. Hierbei stehen a, b und c für gegebene Zahlen. Die Lösungen sind Zahlenpaare (x; y), welche die Gleichung erfüllen.

Die zugehörigen Punkte im Koordinatensystem liegen auf einer Geraden.

Beispiel: x − y = 3

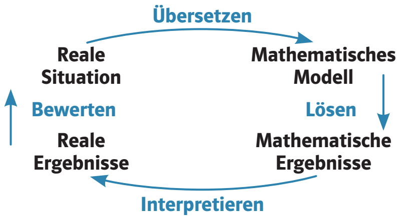


x	0	2,5	3	3,5	…
y	−3	−0,5	0	0,5	…

→ Geraden

Modellieren

Beim Modellieren wird eine Problemsituation aus der realen Welt in ein mathematisches Modell übersetzt.
Mithilfe der Lösung werden mathematische Ergebnisse formuliert, die wiederum interpretiert werden können und zu realen Ergebnissen führen.
Abschließend erfolgt eine Bewertung des Ergebnisses in der realen Situation.



→ Geraden und Parabeln

Lineares Gleichungssystem

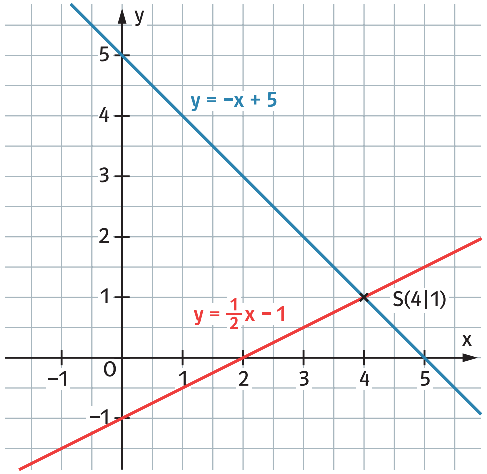
Zwei lineare Gleichungen mit jeweils zwei Variablen bilden zusammen ein **lineares Gleichungssystem**. Dieses lässt sich grafisch oder rechnerisch lösen.

(1) x − 2y = 2
(2) x + y = 5

→ Geraden

Grafisches Lösungsverfahren

Die linearen Gleichungen lassen sich als Geraden darstellen.
Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden erfüllen beide Gleichungen und sind somit die **Lösung des Gleichungssystems**.
Ein Gleichungssystem hat
- **genau eine Lösung**, wenn sich die zugehörigen Geraden **in einem Punkt schneiden**.
- **keine Lösung**, wenn die Geraden **parallel** verlaufen.
- **unendlich viele Lösungen**, wenn zu den zwei Gleichungen **identische Geraden** gehören.



→ Geraden

Rechnerische Lösungsverfahren

Jedes Zahlenpaar, das beide Gleichungen erfüllt, ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems.
Es gibt drei Verfahren, die man zur Lösungsbestimmung anwenden kann:
- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren

(1) $x - 2y = 2$
(2) $x + y = 5$

Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (4 ; 1).

→ Geraden

Gleichsetzungsverfahren

Zwei Gleichungen sind gegeben.

(1) $y = 2x - 1$
(2) $x + y = 5$

Man löst beide Gleichungen nach derselben Variablen auf.
Durch Gleichsetzen der Terme erhält man eine Gleichung mit einer Variablen.
Man löst diese Gleichung und setzt die Lösung in eine der Gleichungen ein, um die Lösung für die zweite Variable zu bekommen.

(1) $y = 2x - 1$
(2) $y = -x + 5$
(1) = (2): $2x - 1 = -x + 5$
$x = 2$
Einsetzen in (1) ergibt
$y = 3$
Die Lösung lautet (2 ; 3).

→ Geraden

Einsetzungsverfahren

Um aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen eine Gleichung mit einer Variablen zu erhalten, kann man auch die eine in die andere Gleichung **einsetzen**. Die Lösung, die man so für die eine Variable erhält, setzt man in eine der Ursprungsgleichungen ein, um die Lösung für die zweite Variable zu erhalten.

(1) $13x + y = 11$
(2) $-8y - 3 = 13x$
(2) in (1): $-8y - 3 + y = 11$
$y = -2$
Einsetzen in (1) oder (2) ergibt
$x = 1$
Die Lösung lautet (1 ; −2).

→ Geraden

Additionsverfahren

Man formt beide Gleichungen so um, dass beim **Addieren** oder **Subtrahieren** beider Gleichungen eine Variable wegfällt. So entsteht eine Gleichung mit einer Variablen.

$$
\begin{array}{lr}
(1) & 3x + 5y = 10 \\
(2) & 4x - 5y = 4 \\
\hline
(1) + (2): & 7x = 14 \\
 & x = 2 \\
 & y = 0{,}8
\end{array}
$$

Die Lösung lautet (2 ; 0,8).

→ Geraden