Kombinatorik

Lehrerinformation:

Die Schülerinnen und Schüler durchlaufen nacheinander die Runden 1 bis 3. Den Aufgaben einer Runde liegt jeweils eines der drei verschiedenen Urnenmodelle zugrunde, die Schwierigkeit der Aufgaben steigt innerhalb einer Runde. Bei der Erarbeitung der Lösung können die Schüler neben den Aufgaben der Runden die zugehörigen Hilfekarten erhalten (unten zum Ausschneiden). Dabei sollte zunächst Hilfekarte 1, bei zusätzlichem Hilfsbedarf auch Hilfekarte 2 ausgegeben werden (Variationen in Gruppen sind möglich).

Hilfekarte 1
Runde 1

Produktregel

Sind k verschiedene Urnen mit n_1 bzw. n_2 bzw. … n_k Kugeln vorhanden, so gibt es

$\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$

Möglichkeiten, aus jeder der Urnen genau eine Kugel zu ziehen.

Hilfekarte 2
Runde 1

zu 1.1: Zieht man k-mal wiederholt mit Zurücklegen aus einer Urne mit n Kugeln, so sind n^k verschiedene Reihenfolgen möglich.

zu 1.2: Ein Baumdiagramm kann helfen.

zu 1.3: An der ersten Stelle der dreistelligen Zahl kann im Unterschied zu den beiden anderen Stellen keine Null stehen.

Hilfekarte 1
Runde 2

Ziehen ohne Zurücklegen

Werden k Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit n Kugeln gezogen, dann gibt es dafür

$\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$

verschiedene Möglichkeiten.

Hilfekarte 2
Runde 2

zu 2.1: Übertragung auf das Urnenmodell: Wurde eine Farbe verwendet, so kann sie nicht „zurückgelegt“ bzw. wiederverwendet werden.

zu 2.2: Zieht man n-mal wiederholt ohne Zurücklegen aus einer Urne mit n Kugeln, so hat man $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ verschiedene Möglichkeiten.

zu 2.3: Für die Wahrscheinlichkeit p gilt: $p = \frac{\text{Anzahl aller günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$.
Verwenden Sie auch von Hilfekarte 2, Runde 1 den Hinweis zu 1.1.

Hilfekarte 1
Runde 3

Ziehen mit einem Griff

Werden k Kugeln mit einem Griff aus einer Urne mit n Kugeln gezogen, dann gibt es dafür

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

verschiedene Möglichkeiten.

Hilfekarte 2
Runde 3

zu 3.1: Wie viele verschiedene Möglichkeiten, zwei Schüler auszuwählen, gibt es insgesamt? Kommt es nicht auf die Reihenfolge an, sind es halb so viele!

zu 3.2: Übertragen Sie die Zahlen auf das Urnenmodell.

zu 3.3: Es gibt sechs richtige und 43 falsche Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die vier Richtigen und die übrigen zwei Falschen? Verwenden Sie Hilfekarte 1, Runde 1 und Hilfekarte 2, Runde 2 (zu 2.3).

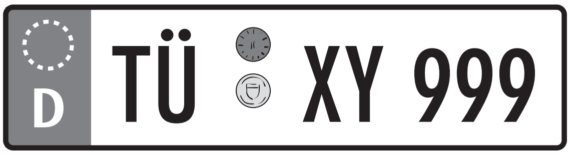
Kombinatorik

Runde 1

1.1 Wie viele dreistellige Zahlen kann man mit drei Würfeln werfen?

1.2 Ein Kleiderschrank beherbergt sieben verschiedene Hemden, fünf verschiedene Hosen und zwei Paar Schuhe. Wie viele Tage können maximal verstreichen, wenn man nicht an zwei Tagen hintereinander dieselbe Kombination anziehen möchte?

1.3 Wie viele Kfz-Kennzeichen aus zwei Buchstaben und einer dreistelligen Zahl (nach dem Land- bzw. Stadtkreiskennzeichen) könnte die Zulassungsstelle einer Stadt ausgeben?



Runde 2

2.1 Für eine dreifarbige Fahne stehen acht Farben zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn jeder Streifen eine andere Farbe hat?

2.2 Bei einem Pferderennen mit zehn Pferden soll auf die richtige Reihenfolge beim Zieleinlauf getippt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für den Zieleinlauf der Pferde gibt es?

2.3 Ein idealer Würfel wird sechsmal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle sechs verschiedenen Augenzahlen auftreten?

Runde 3

3.1 Aus einer Klasse von 30 Schülerinnen und Schülern sollen zwei gleichberechtigte Klassensprecher gewählt werden. Wie viele Möglichkeiten von solchen Klassensprecherpaaren gibt es?

3.2 Wie viele Möglichkeiten gibt es, beim Lotto „6 aus 49“ sechs verschiedene Zahlen anzukreuzen?

3.3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man vier Richtige beim Lotto „6 aus 49“?

Kombinatorik – Lösungen

Runde 1

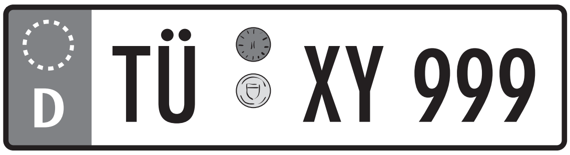
1.1 Wie viele dreistellige Zahlen kann man mit drei Würfeln werfen?

$6^3 = 216$

1.2 Ein Kleiderschrank beherbergt sieben verschiedene Hemden, fünf verschiedene Hosen und zwei Paar Schuhe. Wie viele Tage können maximal verstreichen, wenn man nicht an zwei Tagen hintereinander dieselbe Kombination anziehen möchte?

$7 \cdot 5 \cdot 2 = 70$

1.3 Wie viele Kfz-Kennzeichen aus zwei Buchstaben und einer dreistelligen Zahl (nach dem Land- bzw. Stadtkreiskennzeichen) könnte die Zulassungsstelle einer Stadt ausgeben?



$26^2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 608\,400$

Runde 2

2.1 Für eine dreifarbige Fahne stehen acht Farben zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn jeder Streifen eine andere Farbe hat?

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

2.2 Bei einem Pferderennen mit zehn Pferden soll auf die richtige Reihenfolge beim Zieleinlauf getippt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für den Zieleinlauf der Pferde gibt es?

$10! = 3\,628\,800$

2.3 Ein idealer Würfel wird sechsmal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle sechs verschiedenen Augenzahlen auftreten?

$\frac{6!}{6^6} \approx 1{,}5\,\%$

Runde 3

3.1 Aus einer Klasse von 30 Schülerinnen und Schülern sollen zwei gleichberechtigte Klassensprecher gewählt werden. Wie viele Möglichkeiten von solchen Klassensprecherpaaren gibt es?

$\binom{30}{2} = 435$

3.2 Wie viele Möglichkeiten gibt es, beim Lotto „6 aus 49“ sechs verschiedene Zahlen anzukreuzen?

$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$

3.3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man vier Richtige beim Lotto „6 aus 49“?

$\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}1\,\%$