Unabhängigkeit von Ereignissen

1. Eine Laplace-Münze (Z = Zahl; W = Wappen) wird dreimal geworfen. Die Ergebnisse werden in der Reihenfolge ihres Auftretens notiert, also z. B. (W; Z; Z) oder (Z; W; Z).

a) Geben Sie die Ergebnismenge S und die angegebenen Ereignisse in aufzählender Schreibweise an.

S = {( ), (}

A: „Es fällt höchstens einmal Wappen“; B: „Im ersten Wurf fällt Zahl“; C: „Im dritten Wurf fällt Wappen“.

A = {( ), (}; B = {( ), (};

C = {( ), (};

$A \cap B$ = { }; $A \cap C$ = { }; $B \cap C$ = { }.

b) Welche zwei der Ereignisse A, B und C sind voneinander unabhängig?

$P(A)$ = ; $P(B)$ = ; $P(C)$ = ; $P(A \cap B)$ = ; $P(A \cap C)$ = ; $P(B \cap C)$ =

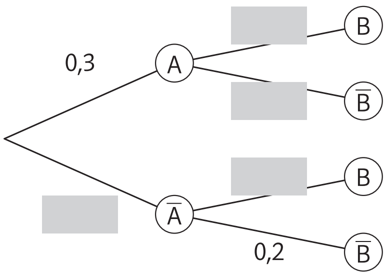
$P(A) \cdot P(B)$ = ; $P(A) \cdot P(C)$ = ; $P(B) \cdot P(C)$ = ;

Damit gilt: Voneinander unabhängig sind die Ereignisse .

2. a) Für eine zufällig ausgewählte Familie mit zwei Kindern betrachtet man die Ereignisse A: „Die Familie hat höchstens einen Jungen“ und B: „Die Familie hat Kinder beiden Geschlechts“. Zeigen Sie unter der Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit von Jungengeburten (J) und Mädchengeburten (M), dass die beiden Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse A und B unabhängig voneinander sind, wenn man Familien mit drei Kindern betrachtet.

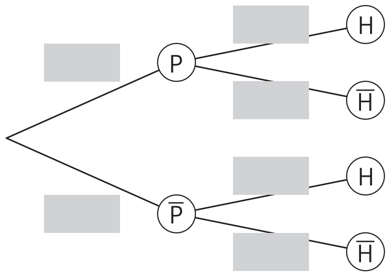
3. a) Von den unabhängigen Ereignissen A und B sind zwei Einträge im Baumdiagramm bekannt. Vervollständigen Sie zuerst das Baumdiagramm. Tragen Sie anschließend alle fehlenden Einträge in die Vierfeldertafel ein.



	B	$\overline{B}$	
A			
$\overline{A}$			
			1

b) Von den unabhängigen Ereignissen P und H sind zwei innere Einträge der Vierfeldertafel bekannt. Vervollständigen Sie zuerst die Vierfeldertafel. Tragen Sie anschließend alle fehlenden Einträge in das Baumdiagramm ein.

	H	$\overline{H}$	
P	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	
$\overline{P}$			
			1



4. Ein Unternehmen hat insgesamt 1680 Mitarbeiter, darunter 760 Frauen und 920 Männer. Die Tabelle zeigt, wie viele Frauen bzw. Männer jeweils eine Lesehilfe (Brille oder Kontaktlinsen) tragen. Ein Mitarbeiter wird zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Mitarbeiter eine Lesehilfe trägt, vom Geschlecht abhängig ist.

	Lesehilfe (L)	Keine Lesehilfe ($\overline{L}$)
Frauen (F)	266	494
Männer ($\overline{F}$)	322	598

5. Es ist bekannt, dass $P(A) = 0{,}3$; $P(\overline{B}) = 0{,}8$ und $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$. Sind die Ereignisse A und B voneinander unabhängig?

Unabhängigkeit von Ereignissen – Lösungen

1. Eine Laplace-Münze (Z = Zahl; W = Wappen) wird dreimal geworfen. Die Ergebnisse werden in der Reihenfolge ihres Auftretens notiert, also z. B. (W; Z; Z) oder (Z; W; Z).

a) Geben Sie die Ergebnismenge S und die angegebenen Ereignisse in aufzählender Schreibweise an.

S = {(Z ; Z ; Z), (Z; Z; W), (Z; W; Z), (W; Z; Z), (Z; W; W), (W; Z; W), (W; W; Z), (W; W; W) }

A: „Es fällt höchstens einmal Wappen“; B: „Im ersten Wurf fällt Zahl“; C: „Im dritten Wurf fällt Wappen“.

A = {(Z ; Z ; Z), (Z; Z; W), (Z; W; Z), (W; Z; Z) }; B = {(Z ; Z ; Z), (Z; Z; W), (Z; W; Z), (Z; W; W) };

C = {(Z ; Z ; W), (Z; W; W), (W; Z; W), (W; W; W) };

$A \cap B$ = { (Z; Z; Z), (Z; Z; W), (Z; W; Z) }; $A \cap C$ = { (Z; Z; W) }; $B \cap C$ = { (Z; Z; W), (Z; W; W) }.

b) Welche zwei der Ereignisse A, B und C sind voneinander unabhängig?

$P(A) = \frac{4}{8}$; $P(B) = \frac{4}{8}$; $P(C) = \frac{4}{8}$; $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$; $P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$; $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$; $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$;

Damit gilt: Voneinander unabhängig sind die Ereignisse B und C.

2. a) Für eine zufällig ausgewählte Familie mit zwei Kindern betrachtet man die Ereignisse A: „Die Familie hat höchstens einen Jungen“ und B: „Die Familie hat Kinder beiden Geschlechts“. Zeigen Sie unter der Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit von Jungengeburten (J) und Mädchengeburten (M), dass die beiden Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.

S = {(J; J), (J; M), (M; J), (M; M)}; A = {(J; M), (M; J), (M; M)}; B = {(J; M), (M; J)}; $A \cap B$ = {(J; M), (M; J)};

$P(A) = \frac{3}{4}$; $P(B) = \frac{2}{4}$; $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{4} \neq P(A) \cdot P(B)$

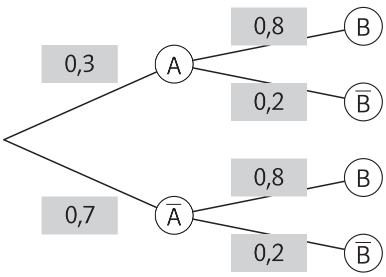
b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse A und B unabhängig voneinander sind, wenn man Familien mit drei Kindern betrachtet.

S = {(J; J; J), (J; J; M), (J; M; J), (M; J; J), (J; M; M), (M; J; M), (M; M; J), (M; M; M)};

A = {(J; M; M), (M; J; M), (M; M; J), (M; M; M)}; B = {(J; J; M), (J; M; J), (M; J; J), (J; M; M), (M; J; M), (M; M; J)};

$A \cap B$ = {(J; M; M), (M; J; M), (M; M; J)}; $P(A) = \frac{4}{8}$; $P(B) = \frac{6}{8}$; $P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{8}$; $P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(B)$

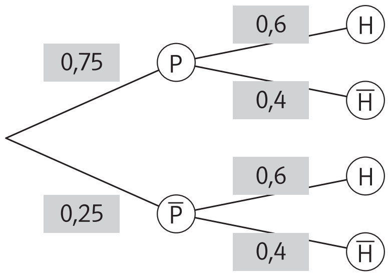
3. a) Von den unabhängigen Ereignissen A und B sind zwei Einträge im Baumdiagramm bekannt. Vervollständigen Sie zuerst das Baumdiagramm. Tragen Sie anschließend alle fehlenden Einträge in die Vierfeldertafel ein.



	B	$\overline{B}$	
A	0,24	0,06	0,3
$\overline{A}$	0,56	0,14	0,7
	0,8	0,2	1

b) Von den unabhängigen Ereignissen P und H sind zwei innere Einträge der Vierfeldertafel bekannt. Vervollständigen Sie zuerst die Vierfeldertafel. Tragen Sie anschließend alle fehlenden Einträge in das Baumdiagramm ein.

	H	$\overline{H}$	
P	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{P}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1



4. Ein Unternehmen hat insgesamt 1680 Mitarbeiter, darunter 760 Frauen und 920 Männer. Die Tabelle zeigt, wie viele Frauen bzw. Männer jeweils eine Lesehilfe (Brille oder Kontaktlinsen) tragen. Ein Mitarbeiter wird zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Mitarbeiter eine Lesehilfe trägt, vom Geschlecht abhängig ist.

	Lesehilfe (L)	Keine Lesehilfe ($\overline{L}$)
Frauen (F)	266	494
Männer ($\overline{F}$)	322	598

Es genügt, ein Ereignispaar, also z. B. L und F, auf stochastische Unabhängigkeit zu untersuchen: $|S| = 1680$; $|F| = 760$; $|L| = 588$; $|L \cap F| = 266$

$P(L) = \frac{588}{1680} = \frac{7}{20}$; $P(F) = \frac{760}{1680} = \frac{19}{42}$; $P(L \cap F) = \frac{266}{1680} = \frac{19}{120}$; $P(L) \cdot P(F) = \frac{19}{120}$

Hieraus folgt, dass das Tragen einer Lesehilfe nicht vom Geschlecht abhängt.

5. Es ist bekannt, dass $P(A) = 0{,}3$; $P(\overline{B}) = 0{,}8$ und $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$. Sind die Ereignisse A und B voneinander unabhängig?

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}2$; $P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14 \neq P(\overline{A} \cap B)$; A und B sind voneinander abhängig.